ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

———————o0o———————

LĂNG THỊ AN

PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER VỚI BIỂU TRƯNG TĂNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

o0o

LĂNG THỊ AN

PHƯƠNG TRÌNH CẶP TÍCH PHÂN ĐỐI VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER VỚI BIỂU TRƯNG TĂNG

Ngành: Giải Tích
Mã số: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. NGUYỄN THỊ NGÂN

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng bản thân tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **TS. Nguyễn Thị Ngân**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong luận văn này là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây.

Ngoài ra, trong luận văn tôi có sử dụng một số kết quả của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc. Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 6 tháng 09 năm 2019

Tác giả

Lăng Thị An

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự giúp đỡ nhiệt tình của người hướng dẫn, **TS. Nguyễn Thị Ngân**.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn bộ môn Giải tích, Khoa Toán, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, hướng dẫn, phản biện để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này. Do thời gian có hạn, bản thân tác giả còn hạn chế nên luận văn có thể có những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được ý kiến phản hồi, đóng góp và xây dựng của các thầy cô, và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 6 tháng 09 năm 2019

Tác giả

Lăng Thị An

Mục lục

Lời mở đầu

Phương trình cặp tích phân xuất hiện khi giải một số các bài toán biên hỗn hợp của phương trình vật lý toán. Các bài toán liên quan đến lý thuyết đàn hồi, vết nứt, dị tật trong môi trường..., có thể đưa đến việc giải các phương trình cặp khác nhau. Tính giải được của phương trình cặp tích phân đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu đến như Nguyễn Văn Ngọc, G. Ia. Popov,... Với mong muốn được nghiên cứu về vấn đề này, chúng tôi đã chọn đề tài "Phương trình cặp tích phân đối với phép biến đổi Fourier với biểu trưng tăng" làm đề tài nghiên cứu cho luận văn thạc sĩ của mình.

Luận văn bao gồm: Mở đầu, hai chương nội dung, Kết luận và Tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ sở về biến đổi Fourier,không gian Sobolev, toán tử giả vi phân, đa thức Chebyshev loại 1, đa thức chebyshev loại 2.

Chương 2: Tính giải được của phương trình cặp tích phân với biểu trưng tăng.

Trong chương này đã trình bày tính giải được của phương trình cặp tích phân với biểu trưng có dạng $|\xi|^{2m}A(\xi)$ và $|\xi|^{2m+1}A(\xi)$.

Trong từng trường hợp có nêu các ví dụ minh họa.

Thái Nguyên, ngày 6 tháng 09 năm 2019

Tác giả

Lăng Thị An

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày các kiến thức cơ bản về biến đổi Fourier, không gian Sobolev, toán tử giả vi phân và các đa thức Chebysev. Những kiến thức này được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [3], [4].

1.1 Biến đổi Fourier

1.1.1 Biến đổi Fourier của các hàm cơ bản giảm nhanh

Vì hàm cơ bản trong S là những hàm khả tổng trong $\mathbb{R}^n$, nên biến đổi Fourier được xác định theo công thức

$$F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{ix.\xi} dx, \quad \varphi \in S.$$

Sau đây là các tính chất quan trọng của biến đổi Fourier trong S.

1) Có thể lấy đạo hàm số lần tùy ý dưới dấu tích phân Fourier

$$D^\alpha F[\varphi](\xi) = F[(ix)^\alpha \varphi](\xi).$$

2) Biến đổi Fourier của đạo hàm

$$F[D^\alpha \varphi](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[\varphi](\xi).$$

3) Đẳng thức Paserval. Giả sử $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Khi đó $F[f]$ là hàm liên tục và bị chặn trong $\mathbb{R}^n$ nên là hàm suy rộng chính quy trong S'. Khi đó ta có đẳng thức

$$\int_{\mathbb{R}^n} F[f](\xi)\varphi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)F[\varphi](x)dx. \tag{1.1}$$

4) Công thức biến đổi Fourier ngược

$$\varphi = F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]], \quad F^{-1}[\varphi(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}F[\varphi(\xi)](x).$$

Định lý 1.1.1. *Biến đổi Fourier F từ S sang S là tương ứng một-một và liên tục vào chính nó, nghĩa là một đẳng cấu tuyến tính.*

Chứng minh. Theo các tính chất 1) và 2), ta có

$$D^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}(i)^{|\alpha|}x^\alpha\varphi(x)dx.$$

$$(-i)^{|\beta|}\xi^\beta\widehat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}D^\beta\psi(x)dx. \tag{1.2}$$

Trong (1.2) thay $\widehat{\psi} = D^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)$ và vận dụng tính chất 1), ta được

$$(-i)^{|\alpha|+|\beta|}\xi^\beta D_\xi^\alpha\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}D_x^\beta(x^\alpha\varphi(x))dx. \tag{1.3}$$

Sử dụng công thức (1.1), ta được

$$||\widehat{\varphi}||_m \leqslant \sum_{|\beta|=0}^{m}\sum_{\alpha=0}^{m}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\beta(x^\alpha\varphi(x))|dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\frac{C_m||\varphi||_{m+n+1}}{(1+|x|)^{n+1}}dx = C_m'||\varphi||_{m+n+1}.$$

Như vậy, nếu $\varphi \in S$, thì $\widehat{\varphi}$ cũng thuộc S, ngoài ra theo (1.1), nếu $\varphi_i \to \varphi$ trong S, thì $\widehat{\varphi}_i \to \widehat{\varphi}$ trong S. Làm tương tự đối với toán tử F^{-1}, ta có kết quả là toán tử F ánh xạ đơn trị và liên tục từ S vào S.

Định lý được chứng minh.